Soekirno Elven

Seorang guru di Subang

Buku saku matematika

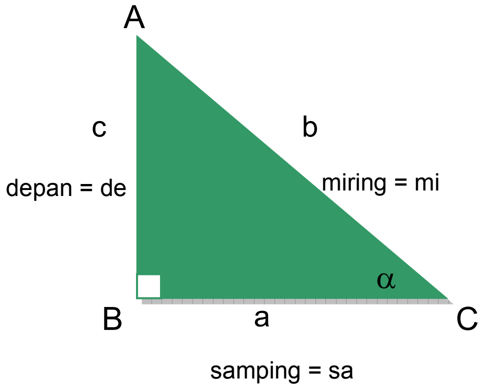
Trigonometri - 1

Copyright © oke.or.id

Artikel ini boleh dicopy ,diubah , dikutip, di cetak dalam media kertas atau yang lain, dipublikasikan kembali dalam berbagai bentuk dengan tetap mencantumkan nama penulis dan copyright yang tertera pada setiap document tanpa ada tujuan komersial

Trigonometri

1. Perbandingan Trigonometri suatu segitiga siku-siku



Segitiga ABC dengan siku-siku di C, maka akan diperoleh nilai perbandingaan (nisbah) berikut :

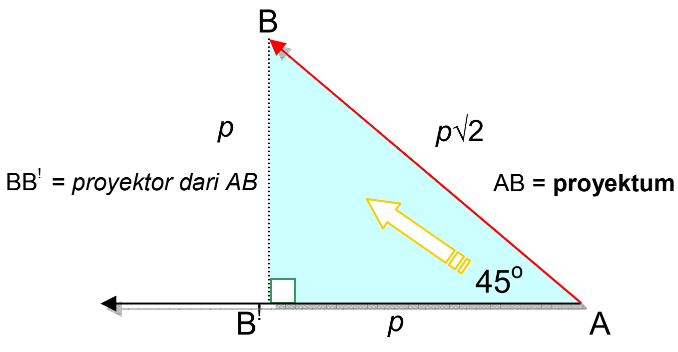
- Sinus sudut α = sin α $= \dfrac{de}{mi} = \dfrac{c}{b}$.
- Cosinus sudut α = cos α $= \dfrac{sa}{mi} = \dfrac{a}{b}$.
- Tangen sudut α = tan α $= \dfrac{de}{sa} = \dfrac{c}{a}$.

Sedangkan untuk sudut di bawah ini merupakan kebalikannya dari sin α, cos α, tan α.

- Cosecan sudut α = csc α $= \dfrac{1}{\sin\alpha} \quad = \dfrac{b}{c}$.
- Secan sudut α = sec α $= \dfrac{1}{\cos\alpha} \quad = \dfrac{b}{a}$.
- Cotangen sudut α = cot α $= \dfrac{1}{\tan\alpha} \quad = \dfrac{a}{c}$.

2. Perbandingan Sudut Istimewa, 0°, 30°, 45°, 60° dan 90°.

Sudut 45°.

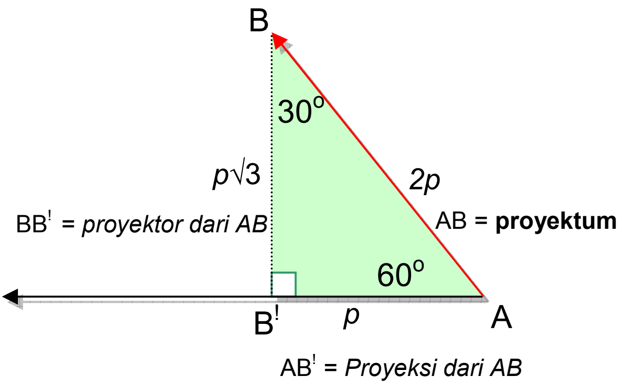


Secara geometri terdapat suatu hubungan tertentu antara proyeksi,proyektum dan proyektor. Apabila panjang AB = **p√2** satuan dan AB! = BB! = **p** satuan, maka dengan menggunakan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku di peroleh :

- $\sin 45^0 \quad = \frac{BB^!}{AB} \quad = \frac{p}{p\sqrt{2}} \quad = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- $\cos 45^0 \quad = \frac{AB^!}{AB} \quad = \frac{p}{p\sqrt{2}} \quad = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- $\tan 45^0 \quad = \frac{BB^!}{AB^!} \quad = \frac{p}{p} \quad = 1$.

- $. \csc 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ..
- $. \sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ..
- $. \cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = \frac{1}{1} = 1$ ..

Sudut 30° dan 60°.

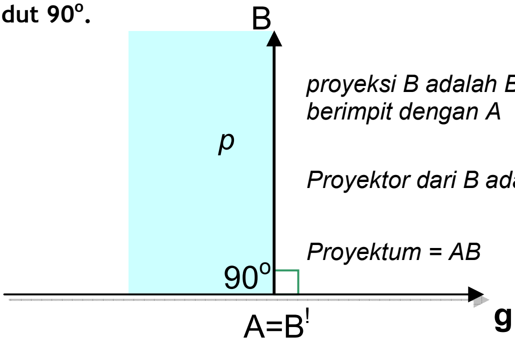


perbandingan trigonometri segitiga siku-siku di peroleh :

- $\sin 30^0 = \frac{AB^!}{AB} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$.
- $\cos 30^0 = \frac{BB^!}{AB} = \frac{p\sqrt{3}}{2p} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- $\tan 30^0 = \frac{AB^!}{BB^!} = \frac{p}{p\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
- $\csc 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
- $\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
- $\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
- $\sin 60^0 = \frac{BB^!}{AB} = \frac{p\sqrt{3}}{2p} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

- $\cos 60^0 \quad = \frac{AB^!}{AB} \quad = \frac{p}{2p} \quad = \frac{1}{2}$.
- $\tan 60^0 \quad = \frac{BB^!}{AB^!} \quad = \frac{p\sqrt{3}}{p} \quad = \sqrt{3}$.
- $\csc 60^0 \quad = \frac{1}{\sin 60^0} \quad = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \quad = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
- $\sec 60^0 \quad = \frac{1}{\cos 60^0} \quad = \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad = 2$.
- $\cot 60^0 \quad = \frac{1}{\tan 60^0} \quad = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Sudut 90^o.



A = *Proyeksi AB ke* ***g***

Sudut 0^o.

Proyektum = AB = p

Proyektor dari B ke ***g*** *adalah BB' = 0,*
Maka B' Proyeksi B pada garis ***g****.*

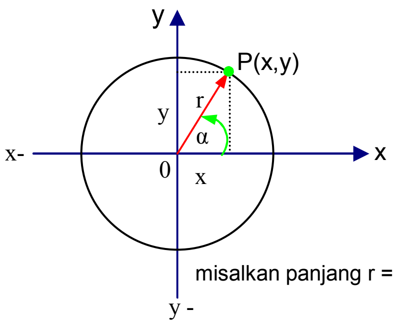
Proyeksi dari AB ke ***g*** *adalah* ***AB*** *sendiri* ***= p***

- $\sin 0^0 \quad = \frac{BB^!}{AB} \quad = \frac{0}{p} \quad = 0$.
- $\cos 0^0 \quad = \frac{AB^!}{AB} \quad = \frac{p}{p} \quad = 1$.

- $\tan 0^0 = \frac{BB'}{AB'} = \frac{0}{p} = 0$.
- $\csc 0^0 = \frac{1}{\sin 0^o} = \frac{p}{0} = \text{tak terdefinisi}$.
- $\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^o} = \frac{p}{p} = 1$.
- $\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^o} = \frac{p}{0} = \text{tak terdefinisi}$.

3. Sudut 180°, 270°, dan 360°.

Perhatikan gambar berikut :



misalkan panjang r = 1 satuan panjang

Sudut 180°.

Apabila **r** bergerak berlawanan arah jarum jam sehingga berimpit pada sumbu x negatif, maka sudut α= 180°, r = 1, x = -1 dan y = 0. Sehingga diperoleh :

- $\sin 180^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$.
- $\cos 180^0 = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$.
- $\tan 180^0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$.
- $\csc 180^0 = \frac{1}{\sin 180^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$.
- $\sec 180^0 = \frac{1}{\cos 180^o} = \frac{1}{-1} = -1$.
- $\cot 180^0 = \frac{1}{\tan 180^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$.

Sudut 270°.

Apabila **r** bergerak berlawanan arah jarum jam sehingga berimpit pada sumbu y negatif, maka sudut α= 270°, r = 1, x = 0 dan y = -1. Sehingga diperoleh :

- $\sin 270^0 = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$.
- $\cos 270^0 = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$.
- $\tan 270^0 = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{tak terdefinisi}$.
- $\csc 270^0 = \frac{1}{\sin 270^o} = \frac{1}{-1} = -1$.
- $\sec 270^0 = \frac{1}{\cos 270^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$
- $\cot 270^0 = \frac{1}{\tan 270^o} = \frac{1}{-1/0} = 0$.

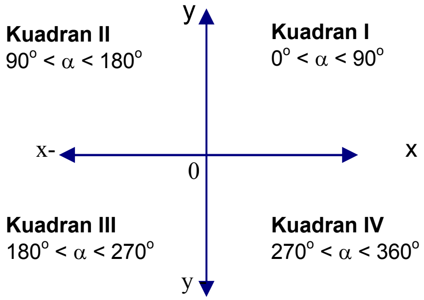
Sudut 360° dan Sudut 0°.

Apabila **r** bergerak berlawanan arah jarum jam satu putaran penuh sehingga berimpit pada sumbu x lagi, maka sudut α= 360°, r = 1, x = 1 dan y = 0. jadi perbandingan trigonometrinya sama dengan sudut α = 0°.

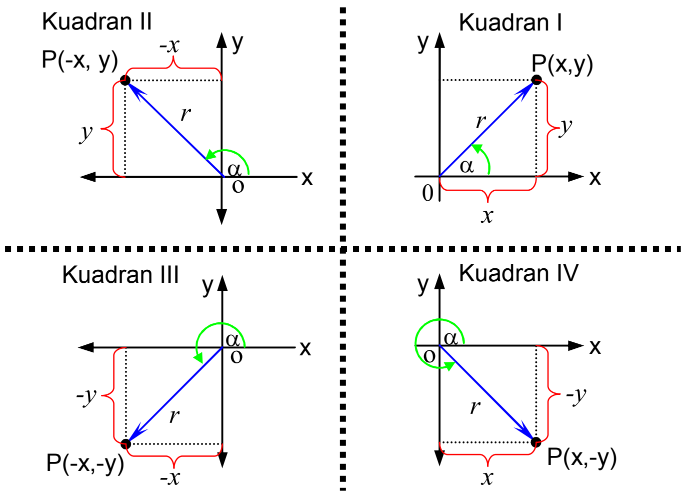
- $\sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$.
- $\cos 360^0 = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\tan 360^0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$.
- $\csc 360^0 = \frac{1}{\sin 360^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$.
- $\sec 360^0 = \frac{1}{\cos 360^o} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\cot 360^0 = \frac{1}{\tan 360^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$.

4. Sudut pada Kuadran.

Koordinat kartesius di bagi ke dalam 4 bagian yang sama besar, tiap bagian mewakili kuadran I, kuadran II, kuadran III dan kuadran IV.



Tanda Perbandingan Trigonometri Pada setiap Kuadran.



TIPS - 1

Tidak dianjurkan sebelum memahami konsep-konsep matematika dengan baik, penggunaan tips ini hanyalah sebagai variasi dalam belajar matematika.

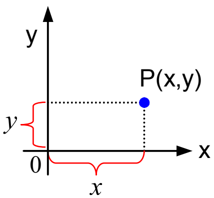
Secara umum di simpulkan : semua-sindikat-tangannya-kosong

Kuadran II : **sindikat** = nilai perbandingan trigonometri untuk sin α dan csc α bertanda **POSITIF**, **sedangkan** perbandingan trigonometri lainnya bertanda **NEGATIF.**	Kuadran I : **semua** = semua nilai perbandingan trigonometri setiap sudut bertanda **POSITIF**
Kuadran III : **tangannya** = nilai perbandingan trigonometri untuk tan α dan cot α bertanda **POSITIF**, **sedangkan** perbandingan trigonometri lainnya bertanda **NEGATIF.**	Kuadran IV : **kosong** = nilai perbandingan trigonometri untuk cos α dan sec α bertanda **POSITIF**, **sedangkan** perbandingan trigonometri lainnya bertanda **NEGATIF.**

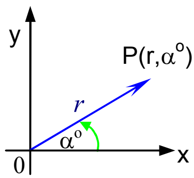
5. Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub.

Perhatikanlah gambar di bawah ini :

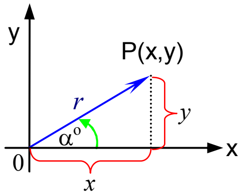
Koordinat Kartesius

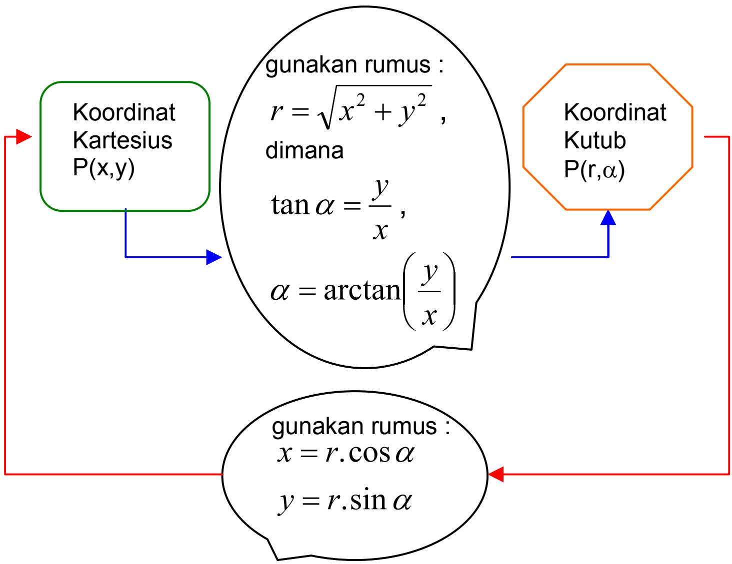


Koordinat Kutub



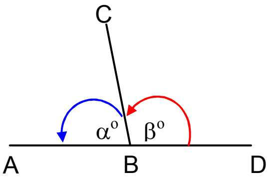
Hubungan kedua koordinat tersebut dapat dinyatakan :





6. Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi.

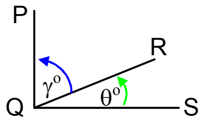
Pengantar Mengenai Sudut Berelasi(berhubungan) :



$\angle$ ABC = α^o dan $\angle$ DBC = β^o
ilustrasi dua buah sudut berpelurus

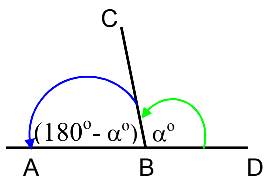
Sudut α dan sudut β akan *saling berpelurus* jika $\alpha + \beta = 180^o$ misalnya $\alpha = 80^o$ dan $\beta = 100^o$, karena $80^o + 100^o = 180^o$, oleh sebab itu sudut 80^o dan sudut 100^o disebut dua buah sudut yang *berelasi* (berhubungan).

Sudut θ dan sudut γ akan *saling berpenyiku* jika $\theta + \gamma = 90^o$ misalnya $\theta = 30^o$ dan $\gamma = 60^o$, karena $30^o + 60^o = 90^o$, oleh sebab itu sudut 30^o dan sudut 60^o disebut dua buah sudut yang *berelasi* (berhubungan).

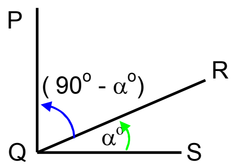


$\angle$ SQR = θ^o dan $\angle$ PQR = γ^o
ilustrasi dua buah sudut berpenyiku

Secara Umum Sudut Berelasi (berhubungan) :

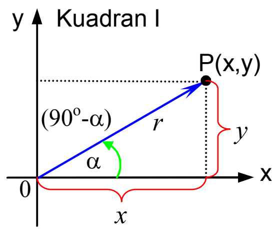


$\angle$ ABC = $(180^o - \alpha^o)$ dan $\angle$ DBC = α^o
ilustrasi dua buah sudut berpelurus



$\angle$ SQR = α^o dan $\angle$ PQR =$(90^o - \alpha^o)$
ilustrasi dua buah sudut berpenyiku

➢ Sudut α^o dan $(90^o - \alpha^o)$: Kuadran I



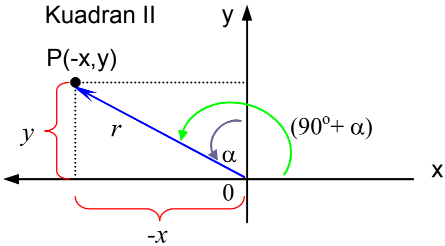
α	(90° - α)
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	$\cos(90-\alpha) = \frac{y}{r}$
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	$\sin(90-\alpha) = \frac{x}{r}$
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$	$\cot(90-\alpha) = \frac{y}{x}$
$\csc\alpha = \frac{r}{y}$	$\sec(90-\alpha) = \frac{r}{y}$
$\sec\alpha = \frac{r}{x}$	$\csc(90-\alpha) = \frac{r}{x}$
$\cot\alpha = \frac{x}{y}$	$\tan(90-\alpha) = \frac{x}{y}$

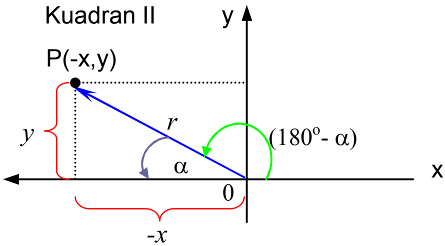
Kesimpulan :

sin α = cos (90° - α°) ; cos α = sin (90° - α°) ; tan α = cot (90° - α°)

csc α = sec (90° - α°) ; sec α = csc (90° - α°) ; cot α = tan (90° - α°)

➢ **Sudut α^o dan $(90^o + \alpha^o)$ atau $(180^o - \alpha^o)$: Kuadran II**





Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada penentuan perbandingan trigonometri α^o dan $(90^o - \alpha^o)$,

Kesimpulan :

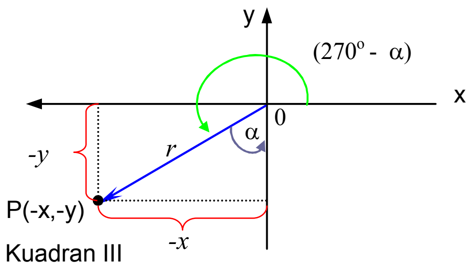
$\sin(90^o + \alpha^o) = \cos\alpha$
$\cos(90^o + \alpha^o) = -\sin\alpha$
$\tan(90^o + \alpha^o) = -\cot\alpha$

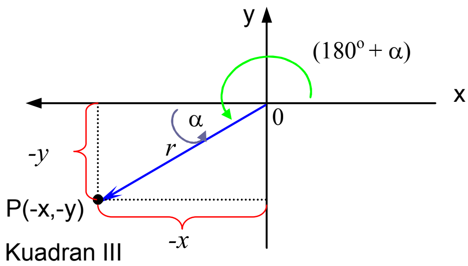
$\sin(180^o - \alpha^o) = \sin\alpha$
$\cos(180^o - \alpha^o) = -\cos\alpha$
$\tan(180^o - \alpha^o) = -\tan\alpha$

$\csc(90^o + \alpha^o) = \sec\alpha$
$\sec(90^o + \alpha^o) = -\csc\alpha$
$\cot(90^o + \alpha^o) = -\tan\alpha$

$\csc(180^o - \alpha^o) = \csc\alpha$
$\sec(180^o - \alpha^o) = -\sec\alpha$
$\cot(180^o - \alpha^o) = -\cot\alpha$

➢ **Sudut α^o dan $(270^o - \alpha^o)$ atau $(180^o + \alpha^o)$: Kuadran III**





Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada penentuan perbandingan trigonometri sebelumnya,

Kesimpulan :

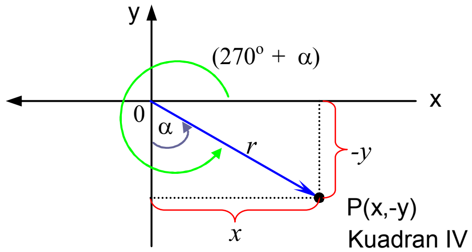
$\sin (270^o - \alpha^o) = -\cos \alpha$
$\cos (270^o - \alpha^o) = -\sin \alpha$
$\tan (270^o - \alpha^o) = \cot \alpha$

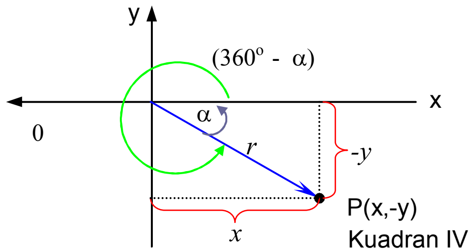
$\sin (180^o + \alpha^o) = -\sin \alpha$
$\cos (180^o + \alpha^o) = -\cos \alpha$
$\tan (180^o + \alpha^o) = \tan \alpha$

$\csc (270^o - \alpha^o) = -\sec \alpha$
$\sec (270^o - \alpha^o) = -\csc \alpha$
$\cot (270^o - \alpha^o) = \tan \alpha$

$\csc (180^o + \alpha^o) = -\csc \alpha$
$\sec (180^o + \alpha^o) = -\sec \alpha$
$\cot (180^o + \alpha^o) = \cot \alpha$

- **Sudut α^o dan $(270^o + \alpha^o)$ atau $(360^o - \alpha^o)$: Kuadran IV**





Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada penentuan perbandingan trigonometri sebelumnya,

Kesimpulan :

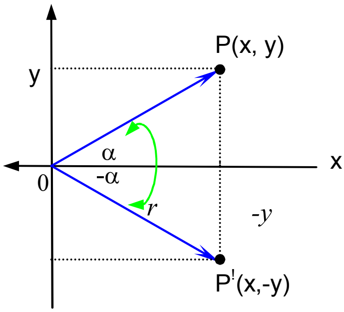
$$\begin{aligned} \sin(270^o + \alpha^o) &= -\cos\alpha \\ \cos(270^o + \alpha^o) &= \sin\alpha \\ \tan(270^o + \alpha^o) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(360^o - \alpha^o) &= -\sin\alpha \\ \cos(360^o - \alpha^o) &= \cos\alpha \\ \tan(360^o - \alpha^o) &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \csc(270^o + \alpha^o) &= -\sec\alpha \\ \sec(270^o + \alpha^o) &= \csc\alpha \\ \cot(270^o + \alpha^o) &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \csc(360^o + \alpha^o) &= -\csc\alpha \\ \sec(360^o + \alpha^o) &= \sec\alpha \\ \cot(360^o + \alpha^o) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

➤ Sudut α^o dan sudut (- α^o) atau sudut negatif



sin (- α^o)	=	- sin α
cos (- α^o)	=	cos α
tan (- α^o)	=	- tan α

csc (- α^o)	=	- csc α
sec (- α^o)	=	sec α
cot (-α^o)	=	- cot α

Perhatikanlah sudut negatif dengan sudut di kuadran IV, (360^o - α^o) adakah kesamaannya ?

TIPS - 2

Tidak dianjurkan sebelum memahami konsep-konsep matematika dengan baik, penggunaan tips ini hanyalah sebagai variasi dalam belajar matematika.

Cara menentukan sudut berelasi pada perbandingan trigonometri.

a. Apabila di depan angka nol sudut berelasi angka **ganjil,** maka
   - i. Nama sudut berubah sesuai pasangan (lihat tabel)
   - ii. Tanda positif atau negatif di tentukan oleh nama sudut asal (lihat semua-sindikat-tangannya-kosong)

Berlaku untuk sudut seperti di bawah ini :

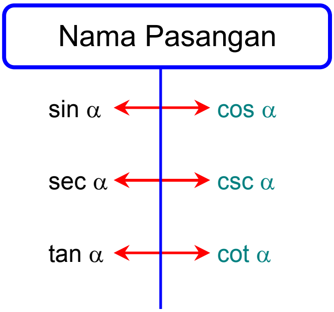
(90^o - α^o) (90^o + α^o) (270^o - α^o) (270^o + α^o)

http://oke.or.id

b. Apabila di depan angka nol sudut berelasi angka **genap**, maka
   i. Nama sudut tetap.
   ii. Tanda positif atau negatif di tentukan oleh nama sudut asal (lihat semua-sindikat-tangannya-kosong

Berlaku untuk sudut seperti di bawah ini :

$(180^o - \alpha^o)$ $(180^o + \alpha^o)$ $(360^o - \alpha^o)$ $(360^o + \alpha^o)$



Contoh Soal

1. Nyatakanlah perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan sudut komplemennya.

   a. $\sin 39^o$ b. $\cos 40^o$ c. $\tan 57^o$

   d. $\cot 23^o$ e. $\sec 9^o$ f. $\csc 76^o$

Jawab : karena soal tersebut semua berada di kuadran I, maka

a. $\sin 39^o = \sin (90^o - 51^o)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \cos 51^o$, {tanda sudut awal **sin** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

b. $\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \sin 50^\circ$, {tanda sudut awal **cos** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

c. $\tan 57^\circ = \tan(90^\circ - 33^\circ)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \cot 33^\circ$, {tanda sudut awal **tan** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

d. $\cot 23^\circ = \cot(90^\circ - 67^\circ)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \tan 51^\circ$, {tanda sudut awal **cot** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

e. $\sec\ 9^\circ = \sec(90^\circ - 81^\circ)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \csc 81^\circ$, {tanda sudut awal **sec** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

f. $\csc 76^\circ = \csc(90^\circ - 14^\circ)$ {tips **2a** maka nama sudut berubah sesuai pasangan}

$= \sec 14^\circ$, {tanda sudut awal **csc** di kd I +, maka hasilnya tetap positif}.

2. Nyatakanlah perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan sudut komplemennya.

a. $\sin 99^\circ$	b. $\cos 122^\circ$	c. $\tan 136^\circ$
d. $\cot 160^\circ$	e. $\sec\ 152^\circ$	f. $\csc 95^\circ$

Jawab : karena soal tersebut semua berada di kuadran II, maka bisa 2 cara dalam menjawabnya.

$\sin 99^\circ$

Cara 1 :
$\sin 99^\circ = \sin(90^\circ + 9^\circ)$
- nama sudut berubah cos,
- tanda sudut sin di kd I +,
- hasilnya $\cos 9^\circ$.

Cara 2 :
$\sin 99^\circ = \sin(180^\circ - 81^\circ)$
- nama sudut tetap sin,
- tanda sudut sin di kd I +,
- hasilnya $\sin 81^\circ$.

$\cos 122^o$

Cara 1 :
$\cos 122^o = \cos(90^o + 32^o)$
- nama sudut berubah sin,
- tanda sudut cos di kd II -,
- hasilnya $-\sin 32^o$.

Cara 2 :
$\cos 122^o = \cos(180^o - 58^o)$
- nama sudut tetap cos,
- tanda sudut cos di kd II -,
- hasilnya $-\cos 58^o$.

Dengan cara yang sama

b. $\tan 136^o = \tan(90^o + 46^o) = -\cot 46^o$
atau
$\tan 136^o = \tan(180^o - 44^o) = -\tan 44^o$.

c. $\cot 160^o = \cot(90^o + 70^o) = -\tan 70^o$
atau
$\cot 160^o = \cot(180^o - 20^o) = -\cot 20^o$.

d. $\sec 152^o = \sec(90^o + 62^o) = -\csc 62^o$
atau
$\sec 152^o = \sec(180^o - 28^o) = -\sec 28^o$.

e. $\csc 95^o = \csc(90^o + 5^o) = \sec 5^o$.
atau
$\csc 95^o = \csc(180^o - 85^o) = \csc 85^o$.

Konklusi

Cara tersebut berlaku analog untuk kuadran III, IV hanya tinggal menyesuaikan sudut dan tanda (+ atau -).

➢ Sudut $(k.360^o + \alpha^o)$ dan Sudut $(k.360^o - \alpha^o)$

Besarnya sebuah sudut dapat ditulis sebagai :

$$\boxed{(k \times 360^o + \alpha^o)}$$

Contoh Soal

1. Nyatakanlah perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan sudut komplemennya.

   a. $\sin(-300^o)$ b. $\cos(-120^o)$ c. $\tan(-210^o)$

   d. $\cot(-1110^o)$ e. $\sec(-850^o)$ f. $\csc(-945^o)$

Jawab : dapat diselesaikan ke dalam 2 cara penyelesaian.

$\sin(-300^o)$

Cara 1 :
$\sin(-300^o) = -\sin(300^o)$
$-[\sin(270^o + 30^o)]$
$-[-\cos 30^o]$
- hasilnya **$\cos 30^o$**.

Cara 2 :
$\sin(-300^o) = -\sin(300^o)$
$-[\sin(360^o - 60^o)]$
$-[-\sin 60^o]$
- hasilnya **$\sin 60^o$**.

$\sec(-850^o)$

Cara 1 :
$\sec(-850^o) = \sec(850^o)$
$\sec[(3 \bullet 360^o + 230^o)]$
$\sec[230^o] = \sec(270^o - 40^o)$
- hasilnya **$-\csc 40^o$**.

Cara 2 :
$\sec(-850^o) = \sec(850^o)$
$\sec[(3 \bullet 360^o + 230^o)]$
$\sec[230^o] = \sec(180^o + 50^o)$
- hasilnya **$-\sec 50^o$**.

Dengan cara yang sama

b. $\tan(-210^o) = -\tan 210^o = -[\tan(270^o - 60^o)]$
$= -[\cot 60^o] =$ $\mathbf{-\cot 60^o}$.
atau
$\tan(-210^o) = -\tan 210^o = -[\tan(180^o + 30^o)]$
$= -[\tan 30^o] =$ $\mathbf{-\tan 30^o}$.

c. $\cot(-1110^o) = -\cot 1110^o = -[\cot(3 \bullet 360^o + 30^o)]$
$= -[\cot 30^o] =$ $\mathbf{-\cot 30^o}$.
atau
$= -[\cot 30^o] = -[\cot(90^o - 60^o)]$.
$= -[\tan 60^o] =$ $\mathbf{-\tan 60^o}$

d. $\csc(-945^o) = -\csc 945^o = -[\csc(3 \bullet 360^o - 135^o)]$
$= -[-\csc 135^o] =$ $\mathbf{\csc 135^o}$.
atau
$= [\csc 135^o] = [\csc(90^o + 45^o)]$.
$=$ $\mathbf{\sec 45^o}$
atau
$= [\csc 135^o] = [\csc(180^o - 45^o)]$.
$=$ $\mathbf{\csc 45^o}$

Contoh Soal

2. Nyatakanlah perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan sudut komplemennya.

a. $\sin 1.000^o$ c. $\csc 1.000^o$ e. $\tan 2.000^o$

b. $\cot 1.000^o$ d. $\cos 2.000^o$ f. $\sec 2.000^o$

Jawab : dapat diselesaikan ke dalam 2 cara penyelesaian.

sin 1.000^{o}

Cara 1 :
sin 1.000^{o}
sin [($3\bullet 360^{o} + 80^{o}$)]
sin [80^{o}]
sin 80^{o}.

Cara 2 :
sin 1.000^{o}
sin [($3\bullet 360^{o} + 80^{o}$)]
sin [80^{o}] = sin ($90^{o} - 10^{o}$)
cos 10^{o}.

tan 2.000^{o}

Cara 1 :
tan 2.000^{o}
tan [($6\bullet 360^{o} + 160^{o}$)]
- [tan (160^{o})]
- [tan($180^{o} - 20^{o}$)] = -[-tan 20^{o}]
tan 20^{o}.

Cara 2 :
tan 2.000^{o}
tan [($6\bullet 360^{o} + 160^{o}$)]
- tan (160^{o}])
-[tan ($90^{o} + 70^{o}$)] = -[-cot 70^{o}]
cot 70^{o}.

Untuk b, c, d dan f dapat dikerjakan secara mandiri sebagai latihan !

7. Identitas Trigonometri.

➢ Hubungan Kebalikan.

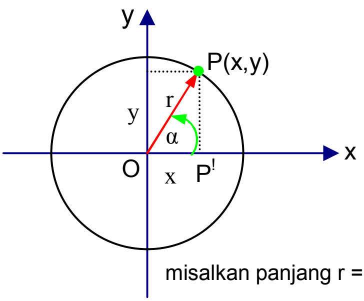
- $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

- $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$
- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

➢ Hubungan Perbandingan (kuosien).

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

➢ Hubungan Sebab Akibat Dalil Pythagoras.



misalkan panjang r = 1 satuan panjang

Dari segitiga OPP' , diperoleh hubungan pythagoras:

$$\left(OP'\right)^2 + \left(PP'\right)^2 = \left(OP\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Karena $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$ dan $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, diperoleh

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$\sin\alpha \times \sin\alpha = \sin^2\alpha$
$\cos\alpha \times \cos\alpha = \cos^2\alpha$

Apabila $x^2 + y^2 = 1$, ke dua ruas dibagi oleh x^2, maka diperoleh :

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Karena $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ dan $\sec\alpha = \frac{1}{x}$, diperoleh

$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$.

Sekarang jika $x^2 + y^2 = 1$, ke dua ruas dibagi oleh y^2, maka diperoleh :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

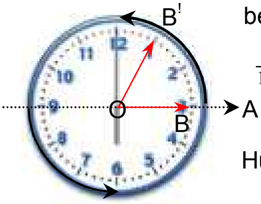
Karena $\cot\alpha = \frac{x}{y}$ dan $\csc\alpha = \frac{1}{y}$, diperoleh

$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$.

8. Satuan Ukuran Sudut.

➢ Derajat (sexagesimal)

Perhatikan gambar di bawah ini, garis OB berimpit dengan garis OA (sebagai kedudukan awal) kemudian bergerak berlawanan dengan arah jarum jam sebanyak 1 putaran = 360^o. Maka diperoleh hubungan bahwa $1^o = \dfrac{1}{360}$ putaran.



beberapa contoh, misalnya $\frac{1}{10}$ putaran adalah $\frac{1}{10} \times 360^o = 36^o$.

Hubungan derajat dengan menit dan detik,

- 1 ^{o} = 60 menit (60') = 3.600 detik (3.600")
- 1' = $\frac{1}{60}^o$
- 1" = $\frac{1}{60}$'

Contoh Soal

- Ubahlah 22,8^o ke dalam menit, detik.
- Nyatakan 14,54^o ke dalam derajat, menit, dan detik.
- Nyatakan ke dalam desimal derajat, 14^{o}32'24".
- Bila α = 127^{o}24', tentukanlah hasilnya dalam derajat, menit dan detik bila $\frac{1}{5}\alpha$.

Jawab :

- 22,8^o × 60 ' = 1.368 ' (menit) ;
- 22,8^o × 3.600" = 82.080" (detik)

$$
\begin{aligned}
14{,}54^o &= 14^o + \left(\tfrac{5}{10}\right)^o + \left(\tfrac{4}{100}\right)^o \\
&= 14^o + \left(\tfrac{5}{10} \times 60'\right) + \left(\tfrac{4}{100} \times 3.600''\right) \\
&= 14^o + 30' + 144'' \\
&= 14^o + 30' + 120'' + 24'' \\
&= 14^o + 30' + + 2' + 24'' = 14^o + 32' + 24''
\end{aligned}
$$

- **Jadi 14,54^{o} = 14^{o} 32’ 24”.**

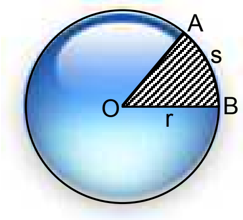
$$
\begin{aligned}
14^o 32' 24'' &= 14^o + 32' + 24'' \\
&= 14^o + \left(\frac{32}{60^o}\right) + \left(\frac{24}{3.600^o}\right) \\
&= 14^o + 0{,}5333^o + 0{,}00667^o \\
&= 14^o + 0{,}53997^o \\
&= 14{,}53997^o = 14{,}54^o
\end{aligned}
$$

- **Jadi 14^{o} 32’ 24” = 14,54^{o}.**

$$
\begin{aligned}
127^o 24' &= 127^o + 24' \\
&= 125^o + 2^o + 24' \\
&= 125^o + (2 \times 60') + 24' \\
&= 125^o + 144' \\
&= 125^o + 140' + 4' = 125^o + 140' + 240''
\end{aligned}
$$

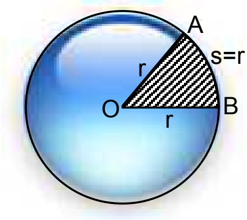
Jadi $\tfrac{1}{5}\alpha = \tfrac{1}{5}\left(125^o + 140' + 240''\right) = 25^o 28' 48''$.

- Radian (sekuler) adalah perbandingan antara panjang busur lingkaran dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut.



$$radian = \frac{\cap AB}{r} = \frac{s}{r}$$

- 1 Radian (1 rad) diartikan sebagai besarnya sudut pusat juring yang panjang busurnya (s) sama dengan jari-jari (r).



- Hubungan Derajat dan Radian

$$1^o = \frac{\pi}{180^o}\text{rad}$$

$$1\ \text{rad} = \frac{180^o}{\pi}$$

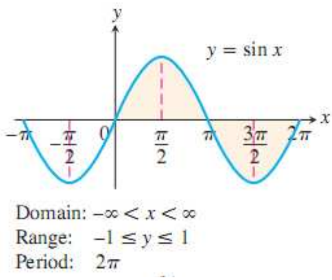
$$1\ rad = 57{,}296^o$$

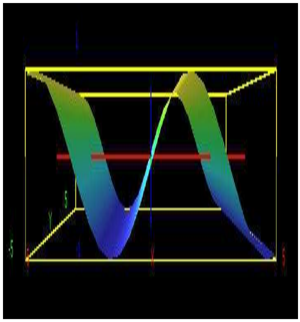
9. Grafik Fungsi Trigonometri.

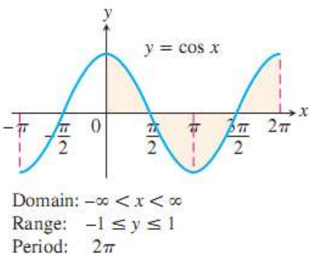
[1]Tabel Nilai Fungsi Trigonometri

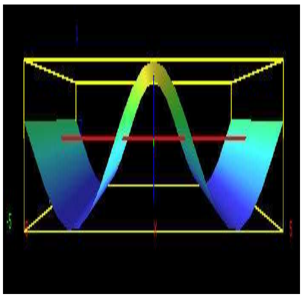
Degrees	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\theta$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\tan\theta$	0	1		−1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

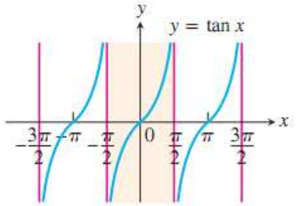
[1]Grafik Fungsi Trigonometri







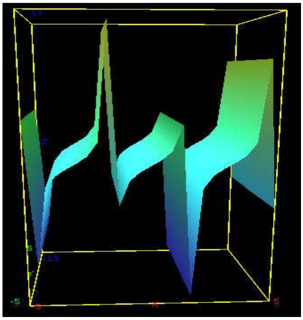


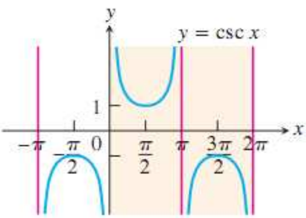


Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Range: $-\infty < y < \infty$

Period: π (c)

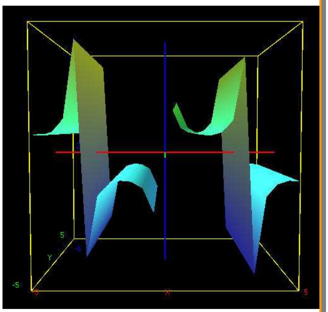


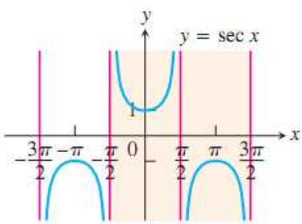


Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Range: $y \leq -1$ and $y \geq 1$

Period: 2π

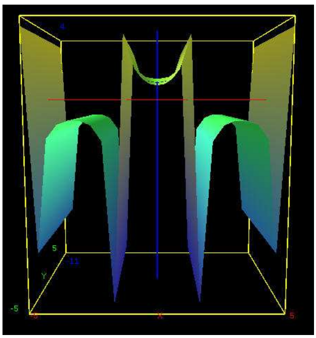




Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Range: $y \leq -1$ and $y \geq 1$

Period: 2π



Refferensi

Portable Plot3d 2.1.5 – freeware www.softpedia.com

Sartono Wirodikromo.2005. *Matematika untuk SMA kelas X*. Jakarta : Erlangga

Suwah Sembiring,dkk. 2007. *Matematika SMA/MA kelas X*. Bandung : CV. Yrama Widya

Tim Matematika SMU.2001. *Matematika 1 untuk SMU*. Jakarta : PT. Galaxy Puspa Mega.

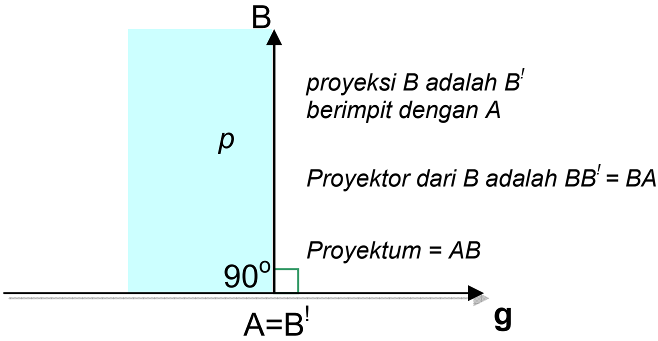
[1] Thomas.2005. *Calculus 11th Editions*. Pearson Addison-Wesley

Saran dan Masukan

elven.soekirno@gmail.com

Sisipan Hal 4

Sudut 90°.



- $\sin 90^0 = \frac{BB^!}{AB} = \frac{p}{p} = 1$.
- $\cos 90^0 = \frac{AB^!}{AB} = \frac{0}{p} = 0$.
- $\tan 90^0 = \frac{BB^!}{AB^!} = \frac{p}{0} = \text{tak terdefinisi}$.
- $\csc 90^0 = \frac{1}{\sin 90^o} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^o} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$
- $\cot 90^0 = \frac{1}{\tan 90^o} = \frac{0}{p} = 0$.