

Soekirno Elven

*Seorang guru di Sulang*

# Buku saku matematika

## Fungsi



**Copyright © oke.or.id**

*Artikel ini boleh dicopy ,diubah , dikutip, di cetak dalam media kertas atau yang lain, dipublikasikan kembali dalam berbagai bentuk dengan tetap mencantumkan nama penulis dan copyright yang tertera pada setiap document tanpa ada tujuan komersial*

## 1. Pengertian dan Notasi

- a. Relasi  $f$  dari  $A$  ke  $B$  disebut dengan fungsi yang memetakan elemen pada himpunan  $A$  **tepat satu** pada himpunan  $B$ .

Maka Ciri Fungsi adalah :

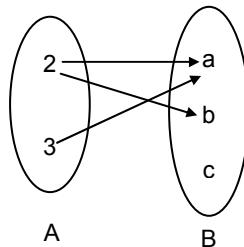
- Hanya terdapat satu unsur yang memetakan dari himpunan  $A$  ke  $B$ . Sehingga terdapat pasangan terurut  $(a, b) \in f$ .
- Tidak terdapat dua atau lebih pasangan terurut berlainan yang mempunyai anggota pertama yang sama.

- b. Notasi fungsi,  $f : A \rightarrow B$  ditulis  $y = f(x)$ ,  
dibaca “  $y$  merupakan fungsi dari  $x$  ”.
- c. Daerah Asal Fungsi (  $D_f = A = \{x \mid x \in R\}$  )
- d. Daerah Hasil Fungsi

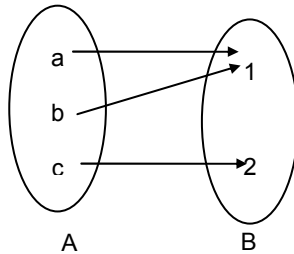
$$R_f = \{y \mid y \in B, \text{ sehingga } y = f(x) \text{ untuk satu } x \in A\}$$

## 2. Beberapa Jenis Fungsi

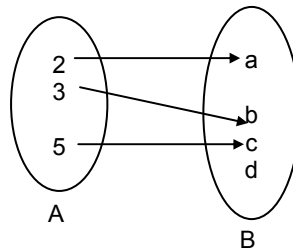
- Fungsi ke Dalam atau into  $f : A \rightarrow B$  dan  $f(A) \in B$



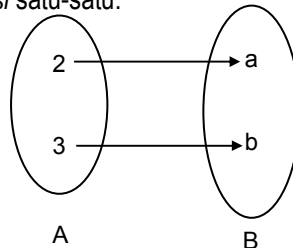
- Fungsi ke Kepala atau onto (surjektif)  $f : A \rightarrow B$  dan  $f(A) = B$



- Fungsi satu-satu atau injektif  $f : A \rightarrow B$  into satu-satu dan  $a_1, a_2 \in A$  dengan  $a_1 \neq a_2$  berlaku  $f(a_1) \neq f(a_2)$ .



- Fungsi Bijektif (fungsi yang bersifat injektif dan surjektif) atau *korespondensi satu-satu*.



### 3. Komposisi Fungsi

- a. Jika fungsi  $f$  dan  $g$  memenuhi  $R_f \cap D_g \neq \emptyset$  maka terdapat fungsi dari himpunan bagian  $D_f$  ke himpunan bagian  $R_g$  yang dinamakan komposisi dari  $g$  ke  $f$ .
- b. Notasi :  $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
- c. Sifat
- Tidak Komutatif atau  $f \circ g \neq g \circ f$   
Asosiatif  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
  - Terdapat unsur identitas  $I(x) = x \rightarrow (f \circ I) = (I \circ f) = f$
  - $(f \circ f^{-1}) = (f^{-1} \circ f) = I$
  - $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
  - $[(f \circ g) \circ g^{-1}](x) = [g^{-1} \circ (g \circ f)](x) = f(x)$
  - Jika  $k = f \circ g \rightarrow k \circ g^{-1}(x) = f(x)$
  - Jika  $h = g \circ f \rightarrow g^{-1} \circ h(x) = f(x)$

### 4. Invers

➔ Jika  $f : A \rightarrow B$ ,  $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$

dimana  $x \in A$ ,  $y \in B$  maka relasi

Dari  $f^{-1} : B \rightarrow A$ ,  $f^{-1} = \{(y, x) \mid x = f^{-1}(y)\}$

dimana  $x \in A$ ,  $y \in B$  disebut dengan **invers fungsi**.

Dimana :  $D_f = R_{f^{-1}}$ ;  $R_f = D_{f^{-1}}$

➔ Dengan kata lain : Jika  $f^{-1}$  adalah relasi yang **bukan** fungsi maka  $f^{-1}$  disebut **invers fungsi**.



**Contoh Soal**

Diket  $g = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$ , maka

$$g^{-1} = \{(4,1), (4,2), (5,3)\},$$

(terlihat  $g^{-1}$ , bukan fungsi)

➔ Jika  $f^{-1}$  adalah relasi yang **merupakan** fungsi maka  $f^{-1}$  disebut **fungsi invers**.



**Contoh Soal**

Diket  $f = \{(2,5), (3,7), (5,10)\}$ , maka  
 $f^{-1} = \{(5,2), (7,3), (10,5)\}$ ,  
 (terlihat  $f^{-1}$ , merupakan fungsi satu-satu)

## 5. Komposisi Fungsi

▶ 
$$[(g \circ f) \circ f^{-1}](x) = [f^{-1} \circ (f \circ g)](x) = g(x)$$

Jika  $k = f \circ g \rightarrow f^{-1} \circ g(x) = g(x)$

Jika  $h = g \circ f \rightarrow h \circ f^{-1}(x) = g(x)$

▶ 
$$(f \circ g \circ h)^{-1} = [h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}](x)$$

## 6. Beberapa Rumus Khusus Mencari Invers

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$f(x) = a^{bx+c} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{{}^a \log x - c}{b}$$

$$f(x) = {}^a \log(bx + c) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a^x - c}{b}$$

## 7. Menentukan Domain dan Range dari Suatu Fungsi

### 7.1. Fungsi Kuadratik $f(x) = y = ax^2 + bx + c$

Df = Real

Rf : Tergantung pada soalnya



#### Contoh Soal

Tentukanlah Rf dari fungsi  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  berikut jika

- a) Df = R
- b) Df =  $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$

Jawab :

- a) Karena Df Real, maka Rf berada pada kurva dengan  $a > 0$

jadi : **Rf =  $y \geq y_{\text{EKSTRIM}}$**  ;

$$y_{\text{EKSTRIM}} = \frac{-D}{4a} = 2, \text{ Rf : } \{y \mid y \geq 2\}$$

- b) Karena Df ditentukan dalam range  $[-1, 4]$ , maka tinggal *mensubstitusikan* ujung-ujung range tsb thd fungsi.

Dan nilai  $y_{\text{ekstrim}}$ , Kemudian urutkan hasilnya.

$$f(-1) = 6$$

$$f(4) = 11, \text{ dan nilai } y_{\text{EKSTRIM}} \text{ } f(2) = 3$$

$$\text{Rf : } \{y \mid 3 \leq y \leq 11\}$$

## 7.2. Fungsi berbentuk pecahan (linear : linear)



### Contoh Soal

Tentukanlah Df dan Rf dari fungsi

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x - 3}$$

Jawab :

$$\text{Df : } \mathbb{R} - \{x \neq 3\} \text{ atau } \mathbb{R} - \{3\}$$

Maka untuk mencari Rf (diinverskan)  
mengubah fungsi menjadi  $x = \dots$

$$\begin{aligned} y = \frac{2x + 5}{x - 3} &\rightarrow y(x - 3) = 2x + 5 \\ x(y - 2) &= 5 + 3y \\ x &= \frac{5 + 3y}{y - 2} \end{aligned}$$

$$\text{Rf : } \mathbb{R} - \{y \neq 2\} \text{ atau } \mathbb{R} - \{2\}$$

## 7.3. Fungsi berbentuk pecahan (kuadratik : linear)



### Contoh Soal

Tentukanlah Df dan Rf dari fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

Jawab :

$$\text{Df : } \mathbb{R} - \{x \neq -2\} \text{ atau } \mathbb{R} - \{-2\}$$

Maka untuk mencari Rf menuliskan fungsi dalam :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} &\rightarrow y(x + 2) = x^2 - x - 2 \\ x^2 - x(1 + y) - 2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$

**Syarat :**

Fs kuadratik terdefinisi pada  $\mathbb{R}$ , maka  $\mathbf{D} \geq 0$ .

$$(1 + y)^2 - 4(1)(-2 - 2y) \geq 0$$

Maka :  $y^2 + 10y + 9 \geq 0$

$$y \leq -9 \text{ atau } y \geq -1$$

Rf :  $\{ y \leq -9 \text{ atau } y \geq -1 \}$

#### 7.4. Fungsi Irasional ( $\sqrt{ax + b}$ )



##### **Contoh Soal**

Tentukanlah Df dan Rf dari fungsi

$$f(x) = \sqrt{2x - 6}$$

Jawab :

Fungsi di bawah tanda akar akan terdefinisi jika nilainya  $\geq 0$ ,  
maka

$$2x - 6 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$\text{Df} : \{ x \mid x \geq 3 \}$$

$$\text{Rf} : \{ y \mid y \geq 0 \}$$

#### 7.5. Fungsi Irasional ( $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ )



##### **Contoh Soal**

Tentukanlah Df dan Rf dari fungsi

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$$

Jawab :

Fungsi di bawah tanda akar akan terdefinisi jika nilainya  $\geq 0$ ,  
maka

$$-x^2 + 4x \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 4 \text{ jadi Df} : \{ x \mid 0 \leq x \leq 4 \}$$

Untuk mencari nilai Rf, maka kuadratkan kedua ruas :

$$y^2 = -x^2 + 4x$$

$$x^2 - 4x - y^2 = 0$$

**Syarat:** terdefinisi fungsi Kuadratik pada  $\mathbb{R}$ ,  $D \geq 0$  dan  $y \geq 0$  (syarat tanda di bawah akar)

$$16 - 4y^2 \geq 0 \text{ dan } y \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 2$$

$$R_f: \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

### **TIPS - 1**

Tidak dianjurkan sebelum memahami konsep-konsep matematika dengan baik, penggunaan tips ini hanyalah sebagai variasi dalam belajar matematika.

### **Menyelidiki suatu grafik merupakan fungsi atau bukan**

Tariklah garis-garis sejajar dengan sumbu Y. Jika ada garis yang sejajar dengan sumbu Y memotong grafik *di dua titik atau lebih*, maka grafik tersebut bukan merupakan suatu fungsi.

### **Mengenai fungsi komposisi**

$$\begin{aligned} f \circ g = k &\Rightarrow k \circ g^{-1} = f && \text{maka } k \circ g^{-1} = f = g^{-1} \circ h \\ &\Rightarrow f^{-1} \circ k = g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f = h &\Rightarrow h \circ f^{-1} = g && \text{maka } h \circ f^{-1} = g = f^{-1} \circ k \\ &\Rightarrow g^{-1} \circ h = f \end{aligned}$$





## Saran dan Masukan

[elven.soekirno@gmail.com](mailto:elven.soekirno@gmail.com)